

DM de mathématiques n°3

Fonctions réelles – Corrigé

Vrai ou faux? Justifier.

- 1) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire, alors f est continue en 0.
- 2) Toute fonction croissante est ou bien strictement croissante, ou bien constante.
- 3) On peut trouver des fonctions majorées qui n'admettent pas de maximum.
- 4) La somme de deux fonctions monotones est une fonction monotone.
- 5) Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
- 6) Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ est minorée sur $\mathbb{R}_+$.
- 7) Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ est minorée sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) Faux. On pose

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(f est bien définie sur $\mathbb{R}$). Montrons que f est impaire :

- Si $x > 0$, on a $f(-x) = -1 = -f(x)$.
- Si $x < 0$, on a $f(-x) = 1 = -f(x)$.
- Si $x = 0$, on a $f(-x) = 0 = -f(x)$.

Ainsi f est impaire. Enfin, comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, la fonction f n'admet pas de limite en 0 donc n'est pas continue en 0.

2) Faux. On pose $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$. La fonction f est croissante (c'est du cours). Cependant :

- f n'est pas strictement croissante : en effet $f(0) = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$.
- f n'est pas constante : en effet $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.

3) Vrai. On pose

$$f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x$$

La fonction f est majorée par 1 (de manière évidente). Montrons cependant que f n'admet pas de maximum. Supposons par l'absurde que f admette un maximum. Alors il existe $a \in [0, 1[$ tel

que :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1[\quad f(x) &\leq f(a) \\ \implies \forall x \in [0, 1[\quad x &\leq a \end{aligned}$$

Or, cela est faux en posant $x = \frac{a+1}{2}$, qui est bien dans $[0, 1[$. Contradiction. Donc f n'admet pas de maximum.

4) Faux. On pose :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

alors on vérifie facilement que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que g est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc elles sont toutes deux monotones. Pourtant, pour tout réel x ,

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2 + 0 = x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 + x^2 = x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi, $f+g$ est la fonction carrée, qui n'est pas monotone.

5) Faux. On pose $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x$. f et g sont bien des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ mais on a pour tout réel $x : (fg)(x) = x^2$ et donc fg n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

6) Vraie. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrons que f est minorée. On pose $m = f(0)$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $x \geq 0$, on a

$$f(x) \geq f(0) \implies f(x) \geq m$$

D'où f est minorée par m .

7) Faux. On pose $f : x \mapsto \ln x$. f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, mais f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}_+^*$.